

Estimation des paramètres de translation, rotation et échelle entre des images bruitées à partir de la transformée de Fourier Mellin

En collaboration avec Jérémie Bigot et Fabrice Gamboa
(Université Toulouse III)

Myriam Vimond

Département de Statistique, Ensai

2^{ème} journée "Méthodes statistiques spatio-temporelles en environnement"

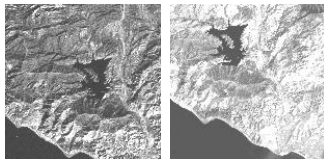


Plan

- ① Principe de base
- ② Méthode d'estimation
- ③ Applications numériques

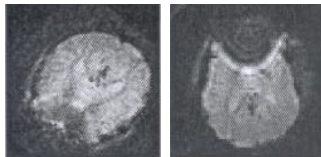
Introduction

Images satellite



Vision Research Lab
Landsat TM
<http://vision.ece.ucsb.edu>

IRM du cerveau



Keller, Shkolnisky et Averbuch
The angular difference function and its application to image registration
Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 27(6) (2005)

Modèle de déformations paramétriques

Le **modèle de régression** :

$$Y_{i,j} = f_j^*(t_i) + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, J.$$

où

- Y_{ij} observation au pixel i de l'image j , (connu) ;
- f_j^* modélise le $j^{\text{ème}}$ image observée (inconnue) ;
- t_i les pixels (connus), et $\epsilon_{i,j}$ un bruit blanc (inconnu).

Le modèle **paramétrique** d'opérateurs de déformation D_j ,

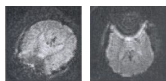
$$f_j^* = D_j f^*, \quad j = 1, \dots, J,$$

avec f^* **la forme commune de l'image.**

La famille paramétrique de déformations

Images 2D

$$f : \mathcal{D} = [-d/2, d/2]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$



$$D : f(\cdot) \rightarrow f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

avec R_θ la matrice de rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi)$,

l'angle de rotation $\theta \in [0, 2\pi)$,

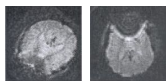
l'échelle $a \in \mathbb{R}_+^*$

la translation $b \in \mathbb{R}^2$

La famille paramétrique de déformations

Images 2D

$$f : \mathcal{D} = [-d/2, d/2]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$



$$D : f(\cdot) \rightarrow f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

avec R_θ la matrice de rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi)$,

Objectifs : ✓ Estimer les paramètres suivants afin d'aligner les signaux,

l'angle de rotation $\theta \in [0, 2\pi)$,

l'échelle $a \in \mathbb{R}_+^*$

la translation $b \in \mathbb{R}^2$

Méthode : ✓ Les estimateurs sont définis comme le minimum de fonctions construites à partir des transformées de Fourier des images.

Transformées de Fourier

$$D_{a,\theta,b} : f(\cdot) \rightarrow D_{a,\theta,b}f(\cdot) = f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

L'idéal : trouver une base de fonctions propres $\{\phi_\gamma\}_\gamma$ pour les opérateurs $D_{a,\theta,b}$:

$$\forall a, \theta, b, \gamma, \quad \text{il existe } \lambda_{a,\theta,b,\gamma} \in \mathbb{C} \text{ tel que } D_{a,\theta,b}\phi_\gamma = \lambda_{a,\theta,b,\gamma}\phi_\gamma,$$

puis décomposer les images f dans cette base.

Transformées de Fourier

$$D_{a,\theta,b} : f(\cdot) \rightarrow D_{a,\theta,b}f(\cdot) = f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

L'idéal : trouver une base de fonctions propres $\{\phi_\gamma\}_\gamma$ pour les opérateurs $D_{a,\theta,b}$:

$$\forall a, \theta, b, \gamma, \quad \text{il existe } \lambda_{a,\theta,b,\gamma} \in \mathbb{C} \text{ tel que } D_{a,\theta,b}\phi_\gamma = \lambda_{a,\theta,b,\gamma}\phi_\gamma,$$

puis décomposer les images f dans cette base.

Les translations $g(\cdot) = f(\cdot - b)$

Les rotations et les homothéties

$$g(\cdot) = f\left(\frac{R_\theta}{a}(\cdot)\right)$$

Transformées de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathcal{D}} f(t) e^{-i\omega \cdot t} \frac{dt}{2\pi}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2;$$

Liens avec les familles d'opérateurs :

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-i\omega \cdot b},$$

Kuglin, et Hines, (1975) : corrélation de phase

Transformées de Fourier

$$D_{a,\theta,b} : f(\cdot) \rightarrow D_{a,\theta,b}f(\cdot) = f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

L'idéal : trouver une base de fonctions propres $\{\phi_\gamma\}_\gamma$ pour les opérateurs $D_{a,\theta,b}$:

$$\forall a, \theta, b, \gamma, \quad \text{il existe } \lambda_{a,\theta,b,\gamma} \in \mathbb{C} \text{ tel que } D_{a,\theta,b}\phi_\gamma = \lambda_{a,\theta,b,\gamma}\phi_\gamma,$$

puis décomposer les images f dans cette base.

Les translations $g(\cdot) = f(\cdot - b)$

Les rotations et les homothéties

$$g(\cdot) = f\left(\frac{R_\theta}{a}(\cdot)\right)$$

Transformées de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathcal{D}} f(t) e^{-i\omega \cdot t} \frac{dt}{2\pi}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2;$$

$$\mathcal{M}_f(k, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r, \theta) r^{-i\nu} e^{-ik\theta} \frac{dr d\theta}{2\pi r}$$

$(k, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R};$

Liens avec les familles d'opérateurs :

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-i\omega \cdot b},$$

$$\mathcal{M}_g(k, \nu) = \mathcal{M}_f(k, \nu) e^{ik\theta} a^{i\nu}$$

Kuglin, et Hines, (1975) : corrélation de phase

Transformées de Fourier

$$D_{a,\theta,b} : f(\cdot) \rightarrow D_{a,\theta,b}f(\cdot) = f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

L'idéal : trouver une base de fonctions propres $\{\phi_\gamma\}_\gamma$ pour les opérateurs $D_{a,\theta,b}$:

$$\forall a, \theta, b, \gamma, \quad \text{il existe } \lambda_{a,\theta,b,\gamma} \in \mathbb{C} \text{ tel que } D_{a,\theta,b}\phi_\gamma = \lambda_{a,\theta,b,\gamma}\phi_\gamma,$$

puis décomposer les images f dans cette base.

Les translations $g(\cdot) = f(\cdot - b)$

Les rotations et les homothéties

$$g(\cdot) = f\left(\frac{R_\theta}{a}(\cdot)\right)$$

Transformées de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathcal{D}} f(t) e^{-i\omega \cdot t} \frac{dt}{2\pi}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2;$$

$$\mathcal{M}_f(k, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r, \theta) r^{\sigma - i\nu} e^{-ik\theta} \frac{dr d\theta}{2\pi r}$$

$(k, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R};$

Liens avec les familles d'opérateurs :

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-i\omega \cdot b},$$

$$\mathcal{M}_g(k, \nu) = a^{-\sigma} \mathcal{M}_f(k, \nu) e^{ik\theta} a^{i\nu}$$

Kuglin, et Hines, (1975) : corrélation de phase

Derrode, et Ghordel, (2004) : Fourier-Mellin Analytique

Transformées de Fourier

$$D_{a,\theta,b} : f(\cdot) \rightarrow D_{a,\theta,b}f(\cdot) = f(R_\theta(\cdot - b)/a),$$

L'idéal : trouver une base de fonctions propres $\{\phi_\gamma\}_\gamma$ pour les opérateurs $D_{a,\theta,b}$:

$$\forall a, \theta, b, \gamma, \quad \text{il existe } \lambda_{a,\theta,b,\gamma} \in \mathbb{C} \text{ tel que } D_{a,\theta,b}\phi_\gamma = \lambda_{a,\theta,b,\gamma}\phi_\gamma,$$

puis décomposer les images f dans cette base.

Problématique

On observe J images :

$$f_j^*(x) = f^*(R_{\theta_j^*}(x - b_j^*)/a_j^*)$$

But : estimation des paramètres

$$a_j^* > 0, \theta_j^* \in [0, 2\pi), b_j^* \in \mathbb{R}^2, j = 1, \dots, J$$

Problématique

On observe J images :

$$f_j^*(x) = f^*(R_{\theta_j^*}(x - b_j^*)/a_j^*)$$

But : estimation des paramètres

$$\mathbf{a}_j^* > \mathbf{0}, \theta_j^* \in [0, 2\pi), \mathbf{b}_j^* \in \mathbb{R}^2, \mathbf{j} = 1, \dots, J$$

.

Reddy et Chatterji, (1996) : estimation par la technique de corrélation de phase (coordonnées log-polaires), en 3 étapes.

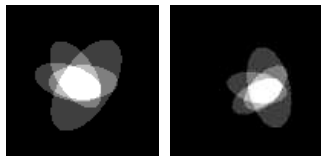
Keller, Averbuch, Israeli (2005) : estimation par la technique de corrélation de phase (translations), et par la fonction de différence angulaire (rotations).

Le modèle

Théorie : pour $j = 1, \dots, J$,

$$f_j^*(x) = f^*\left(\frac{1}{a_j^*} A_{\theta_j^*}(x - b_j^*)\right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- f_j^* a un support compact $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.



Le modèle

Théorie : pour $j = 1, \dots, J$,

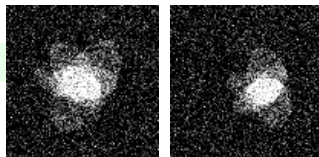
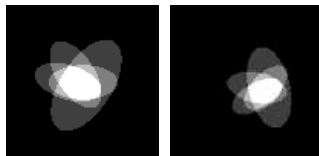
$$f_j^*(x) = f^*\left(\frac{1}{a_j^*} A \theta_j^*(x - b_j^*)\right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- f_j^* a un support compact $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Le modèle de bruit blanc : pour $j = 1 \dots J$,

$$dY_j(x) = f_j^*(x)dx + \epsilon dW_j(x), \quad x \in \mathcal{D}.$$

- W_j sont des mouvements browniens indépendants.
- ϵ est le niveau de bruit (inconnu).



Le modèle

Théorie : pour $j = 1, \dots, J$,

$$f_j^*(x) = f^*\left(\frac{1}{a_j^*} A \theta_j^*(x - b_j^*)\right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- f_j^* a un support compact $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

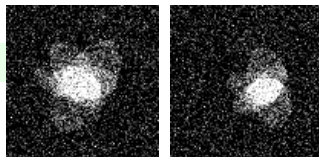
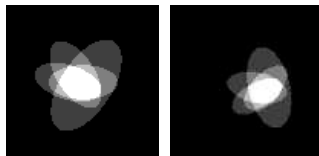
Le modèle de bruit blanc : pour $j = 1 \dots J$,

$$dY_j(x) = f_j^*(x)dx + \epsilon dW_j(x), \quad x \in \mathcal{D}.$$

- W_j sont des mouvements browniens indépendants.
- ϵ est le niveau de bruit (inconnu).

Contraintes d'identifiabilité

$$\theta_1^* = 0, \quad a_1^* = 1, \quad b_1^* = (0, 0)$$



Un exemple réel :



Idée de départ

Notons $\alpha = (a_1, \dots, a_J, \theta_1, \dots, \theta_J) \in [a_{\min}, a_{\max}]^J \times [0, 2\pi[$ ($a_1 = 1, \theta_1 = 0$) et $\beta = (b_1, \dots, b_J) \in [b_{\min}, b_{\max}]^{2J}$ ($b_1 = (0, 0)$).

But : définir un estimateur du minimum de contraste de :

$$\alpha^* = (a_1^*, \dots, a_J^*, \theta_1^*, \dots, \theta_J^*) \quad \text{et} \quad \beta^* = (b_1^*, \dots, b_J^*).$$

✓ On cherche à estimer la fonction de contraste suivante :

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left\| g_j(\alpha, \beta, x) - \frac{1}{J} \sum_{j'=1}^J g_{j'}(\alpha, \beta, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

avec $g_j(\alpha, \beta, x) = f_j^* (a_j R_{-\theta_j} x + b_j)$.

Idée de départ

Notons $\alpha = (a_1, \dots, a_J, \theta_1, \dots, \theta_J) \in [a_{\min}, a_{\max}]^J \times [0, 2\pi[$ ($a_1 = 1, \theta_1 = 0$) et $\beta = (b_1, \dots, b_J) \in [b_{\min}, b_{\max}]^{2J}$ ($b_1 = (0, 0)$).

But : définir un estimateur du minimum de contraste de :

$$\alpha^* = (a_1^*, \dots, a_J^*, \theta_1^*, \dots, \theta_J^*) \quad \text{et} \quad \beta^* = (b_1^*, \dots, b_J^*).$$

✓ On cherche à estimer la fonction de contraste suivante :

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left\| g_j(\alpha, \beta, x) - \frac{1}{J} \sum_{j'=1}^J g_{j'}(\alpha, \beta, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

avec $g_j(\alpha, \beta, x) = f_j^* (a_j R_{-\theta_j} x + b_j)$.

✓ On estime uniformément la fonction M par M_ϵ :

$$(\hat{\alpha}_\epsilon, \hat{\beta}_\epsilon) = \arg \min_{\alpha, \beta} M_\epsilon(\alpha, \beta)$$

✗ Interpolation des images

Procédure d'estimation à 2 pas

Transformées de Fourier des données ($j=1, \dots, J$) :

$$\hat{Y}_j(\omega) = \int_{\mathcal{D}} e^{-i\omega \cdot x} \frac{dY_j(x)}{2\pi} = \hat{f}_j^*(\omega) + \epsilon \hat{W}_j(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^2$$

où $\hat{f}_j^*(\omega) = a_j^{*2} \hat{f}(a_j^* R_{\theta_j^*} \omega) e^{i\omega \cdot b_j^*}$

1^{er} pas : estimation des rotations et des échelles $\alpha^* = (a_1^*, \dots, a_J^*, \theta_1^*, \dots, \theta_J^*)$:

L'estimateur $\hat{\alpha}_\epsilon = \arg \min_{\alpha} M_{1,\epsilon}(\alpha)$ est $1/\epsilon$ -consistant.

2^{ème} pas : estimation des translations $\beta^* = (b_1^*, \dots, b_J^*)$

L'estimateur $\hat{\beta}_\epsilon = \arg \min_{\beta} M_{2,\epsilon}(\beta)$ est consistant.

Procédure d'estimation à 2 pas

Transformées de Fourier des données ($j=1, \dots, J$) :

$$\hat{Y}_j(\omega) = \int_{\mathcal{D}} e^{-i\omega \cdot x} \frac{dY_j(x)}{2\pi} = \hat{f}_j^*(\omega) + \epsilon \hat{W}_j(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^2$$

où $\hat{f}_j^*(\omega) = a_j^{*2} \hat{f}(a_j^* R_{\theta_j^*} \omega) e^{i\omega \cdot b_j^*}$

1^{er} pas : estimation des rotations et des échelles $\alpha^* = (a_1^*, \dots, a_J^*, \theta_1^*, \dots, \theta_J^*)$:

à partir des estimateurs de la *Transformée de Fourier-Mellin* des $r^\sigma |\hat{f}_j|^2$:

$$\mathcal{M}_{|\hat{f}_j|^2}(k, v) = a_j^{*4-\sigma+iv} \mathcal{M}_{|\hat{f}|^2}(k, v) e^{ik\theta_j^*} \quad (j=1, \dots, J)$$

L'estimateur $\hat{\alpha}_\epsilon = \arg \min_{\alpha} M_{1,\epsilon}(\alpha)$ est $1/\epsilon$ -consistant.

2^{ème} pas : estimation des translations $\beta^* = (b_1^*, \dots, b_J^*)$

L'estimateur $\hat{\beta}_\epsilon = \arg \min_{\beta} M_{2,\epsilon}(\beta)$ est consistant.

Procédure d'estimation à 2 pas

Transformées de Fourier des données ($j=1, \dots, J$) :

$$\hat{Y}_j(\omega) = \int_{\mathcal{D}} e^{-i\omega \cdot x} \frac{dY_j(x)}{2\pi} = \hat{f}_j^*(\omega) + \epsilon \hat{W}_j(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^2$$

où $\hat{f}_j^*(\omega) = a_j^{*2} \hat{f}(a_j^* R_{\theta_j^*} \omega) e^{i\omega \cdot b_j^*}$

1^{er} pas : estimation des rotations et des échelles $\alpha^* = (a_1^*, \dots, a_J^*, \theta_1^*, \dots, \theta_J^*)$:

à partir des estimateurs de la *Transformée de Fourier-Mellin* des $r^\sigma |\hat{f}_j|^2$:

$$\mathcal{M}_{|\hat{f}_j|^2}(k, \nu) = a_j^{*4-\sigma+iv} \mathcal{M}_{|\hat{f}_j|^2}(k, \nu) e^{ik\theta_j^*} \quad (j=1, \dots, J)$$

L'estimateur $\hat{\alpha}_\epsilon = \arg \min_{\alpha} M_{1,\epsilon}(\alpha)$ est $1/\epsilon$ -consistant.

2^{ème} pas : estimation des translations $\beta^* = (b_1^*, \dots, b_J^*)$

à partir des transformées de Fourier alignées ($j=1, \dots, J$) :

$$\hat{Z}_j(\beta, \omega) = \hat{a}_j^{-2} \hat{Y}_j(\hat{a}_j^{-1} A_{-\hat{\theta}_j} \omega) e^{i\omega \cdot \hat{a}_j^{-1} A_{\hat{\theta}_j} b_j}$$

L'estimateur $\hat{\beta}_\epsilon = \arg \min_{\beta} M_{2,\epsilon}(\beta)$ est consistant.

Applications numériques

- Nécessite un nombre fini de coefficients de Fourier
- Algorithme de descente du gradient

	$s2n$	$j = 2$
a_j^*		1
\hat{a}_j	1 3 5	
θ_j^*		0
$\hat{\theta}_j$	1 3 5	
$b_j^{1,*}$		10
\hat{b}_j^1	1 3 5	
$b_j^{2,*}$		0
$\hat{b}_j^{2,*}$	1 3 5	

Tab.: Moyennes empiriques et écarts-type (entre parenthèses) des estimateurs \hat{a}_j , $\hat{\theta}_j$, $\hat{b}_j = (\hat{b}_j^1, \hat{b}_j^2)$, sur 50 jeux de données pour différents rapports signal-sur-bruit $s2n$. Les images de départs sont de taille 100×100 pixels

Applications numériques

- Nécessite un nombre fini de coefficients de Fourier
- Algorithme de descente du gradient
- Les erreurs standard sont proportionnelles à $\frac{1}{s2n}$.

	$s2n$	$j = 2$
a_j^*		1
\hat{a}_j	1	1.02 (0.00835)
	3	1.01 (0.00373)
	5	1.02 (0.00215)
θ_j^*		0
$\hat{\theta}_j$	1	0.197 (0.641)
	3	0.27 (0.935)
	5	0.0642 (0.501)
$b_j^{1,*}$		10
\hat{b}_j^1	1	9.64 (1.92)
	3	9.69 (1.01)
	5	9.89 (0.49)
$b_j^{2,*}$		0
\hat{b}_j^2	1	0.107 (1.02)
	3	0.00603 (0.508)
	5	0.0217 (0.448)

Tab.: Moyennes empiriques et écarts-type (entre parenthèses) des estimateurs \hat{a}_j , $\hat{\theta}_j$, $\hat{b}_j = (\hat{b}_j^1, \hat{b}_j^2)$, sur 50 jeux de données pour différents rapports signal-sur-bruit $s2n$. Les images de départ sont de taille 100×100 pixels

Applications numériques

- Nécessite un nombre fini de coefficients de Fourier
- Algorithme de descente du gradient
- Les erreurs standard sont proportionnelles à $\frac{1}{s2n}$.
- Certains estimateurs semblent être biaisés

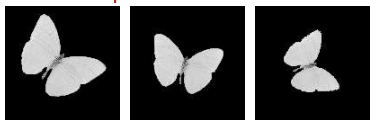
	$s2n$	$j = 2$
a_j^*		1
\hat{a}_j	1	1.02 (0.00835)
	3	1.01 (0.00373)
	5	1.02 (0.00215)
θ_j^*		0
$\hat{\theta}_j$	1	0.197 (0.641)
	3	0.27 (0.935)
	5	0.0642 (0.501)
$b_j^{1,*}$		10
\hat{b}_j^1	1	9.64 (1.92)
	3	9.69 (1.01)
	5	9.89 (0.49)
$b_j^{2,*}$		0
\hat{b}_j^2	1	0.107 (1.02)
	3	0.00603 (0.508)
	5	0.0217 (0.448)

Tab.: Moyennes empiriques et écarts-type (entre parenthèses) des estimateurs \hat{a}_j , $\hat{\theta}_j$, $\hat{b}_j = (\hat{b}_j^1, \hat{b}_j^2)$, sur 50 jeux de données pour différents rapports signal-sur-bruit $s2n$. Les images de départ sont de taille 100×100 pixels

Applications numériques

- Nécessite un nombre fini de coefficients de Fourier
- Algorithme de descente du gradient
- Les erreurs standard sont proportionnelles à $\frac{1}{s2n}$.
- Certains estimateurs semblent être biaisés

Un exemple réel :



Les mêmes images alignées :



	$s2n$	$j = 2$
a_j^*		1
\hat{a}_j	1	1.02 (0.00835)
	3	1.01 (0.00373)
	5	1.02 (0.00215)
θ_j^*		0
$\hat{\theta}_j$	1	0.197 (0.641)
	3	0.27 (0.935)
	5	0.0642 (0.501)
$b_j^{1,*}$		10
\hat{b}_j^1	1	9.64 (1.92)
	3	9.69 (1.01)
	5	9.89 (0.49)
$b_j^{2,*}$		0
$\hat{b}_j^{2,*}$	1	0.107 (1.02)
	3	0.00603 (0.508)
	5	0.0217 (0.448)

Tab.: Moyennes empiriques et écarts-type (entre parenthèses) des estimateurs \hat{a}_j , $\hat{\theta}_j$, $\hat{b}_j = (\hat{b}_j^1, \hat{b}_j^2)$, sur 50 jeux de données pour différents rapports signal-sur-bruit $s2n$. Les images de départ sont de taille 100×100 pixels

Comparaison avec la méthode directe

	$s2n$	Fourier-Mellin	Méthode directe
a_j^* 1			
\hat{a}_j	1	1.018 (0.0096)	1.0983 (0.0657)
	5	1.014 (0.0020)	1.0407 (0.0182)
θ_j^* 0			
$\hat{\theta}_j$	1	0.0768 (0.3056)	2.0337 (1.3737)
	5	0.0141 (0.0644)	2.2372 (1.6292)
$b_j^{1,*}$ 10			
\hat{b}_j^1	1	9.84 (0.9937)	5.7089 (2.4988)
	5	9.93 (0.5550)	6.9275 (1.2935)
b_j^2 0			
$\hat{b}_j^{2,*}$	1	0.0618 (0.7259)	3.9313 (2.5715)
	5	0.0519 (0.3594)	1.9357 (1.2829)

Tab.: Moyennes empiriques et écarts-type (entre parenthèses) des estimateurs \hat{a}_j , $\hat{\theta}_j$, $\hat{b}_j = (\hat{b}_j^1, \hat{b}_j^2)$, sur 50 jeux de données pour différents rapports signal-sur-bruit $s2n$. Les images de départ sont de taille 100×100 pixels

Comparaison avec la méthode directe

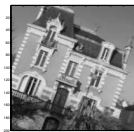
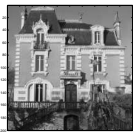
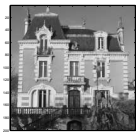
	$s2n$	Fourier-Mellin	Méthode directe
a_j^* 1			
\hat{a}_j	1	1.018 (0.0096)	1.0983 (0.0657)
	5	1.014 (0.0020)	1.0407 (0.0182)
θ_j^* 0			
$\hat{\theta}_j$	1	0.0768 (0.3056)	2.0337 (1.3737)
	5	0.0141 (0.0644)	2.2372 (1.6292)
$b_j^{1,*}$ 10			
\hat{b}_j^1	1	9.84 (0.9937)	5.7089 (2.4988)
	5	9.93 (0.5550)	6.9275 (1.2935)
b_j^2 0			
$\hat{b}_j^{2,*}$	1	0.0618 (0.7259)	3.9313 (2.5715)
	5	0.0519 (0.3594)	1.9357 (1.2829)

Tab.: Moyennes empiriques et écarts-type (entre parenthèses) des estimateurs \hat{a}_j , $\hat{\theta}_j$, $\hat{b}_j = (\hat{b}_j^1, \hat{b}_j^2)$, sur 50 jeux de données pour différents rapports signal-sur-bruit $s2n$. Les images de départ sont de taille 100×100 pixels

Un autre exemple ...

Les images qui suivent ne correspondent pas tout à fait au modèle :

- elles ne sont pas sur un fond noir.
- elles ne représentent pas exactement la même image.



Un autre exemple ...

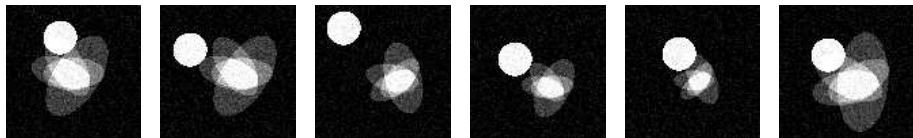
Les images qui suivent ne correspondent pas tout à fait au modèle :

- elles ne sont pas sur un fond noir.
- elles ne représentent pas exactement la même image.



... clutter noise

Que se passe t-il lorsque le bruit n'est pas uniforme ?



En générale, les deux méthodes échouent à estimer les véritables valeurs des paramètres de déformations.

Perspectives

- Généraliser la méthode pour d'autres groupes de déformations, comme le groupe des rotations 3D (avec Jérémie Bigot et Jean-Michel Loubes)
- Approfondir le critère de la méthode directe afin de le rendre plus robuste.
- Sélection de modèle : trouver un compromis entre le nombre de fréquence de Fourier et la qualité des estimateurs (avec Béatrice Laurent)

**MERCI DE VOTRE
ATTENTION**