

Cours de modélisation numérique océan-atmosphère
2ème édition – Brest – Novembre 2015

TP #2 : ondes

1 Introduction

Rappel de physique Dans ce TP nous explorerons comment la modélisation numérique peut reproduire la physique des ondes. Nous allons étudier en particulier les ondes de Rossby et les ondes internes. Le code utilisé est le même que pour le TP advection auquel de la physique est ajoutée. Le code impose la contrainte d'un écoulement 2D incompressible, i.e. la vitesse dérive d'une fonction de courant ψ . Pour les ondes de Rossby on fera tourner le code en version QG. Les équations du modèles sont

$$\begin{aligned}\partial_t q + \mathbf{u} \cdot \nabla q &= 0 \\ \mathbf{u} &= (-\partial_y \psi, \partial_x \psi) \\ \Delta \psi - R_d^{-2} \psi &= q - q_b\end{aligned}\tag{1}$$

où R_d est le rayon de déformation, Δ est le Laplacien et q est la vorticité potentielle (PV) totale, i.e. la somme de la PV planétaire $q_b = f_0 + \beta y$ (ou background) et de la PV de l'écoulement (vorticité $\Delta \psi$ et étirement $-R_d^{-2} \psi$). La présence d'un gradient de $q_b(y)$ permet la propagation des ondes de Rossby dont on rappelle la relation de dispersion

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{|\mathbf{k}|^2 + R_d^{-2}}\tag{2}$$

où $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ est le vecteur d'onde. Ces ondes sont **dispersives** pour $|\mathbf{k}|R_d \geq 1$ et non dispersive pour $|\mathbf{k}|R_d \ll 1$. Dans ce dernier cas la vitesse de propagation est

$$c_{\max} = -\beta R_d^2.\tag{3}$$

Pour les ondes internes on fera tourner le code en version non-hydrostatique (NH). L'écoulement se fait cette fois dans le plan vertical (x, z) . Les équations du modèles sont

$$\begin{aligned}\partial_t \zeta + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta &= \partial_x b \\ \partial_t b + \mathbf{u} \cdot \nabla b &= 0 \\ \mathbf{u} &= (-\partial_z \psi, \partial_x \psi) \\ \Delta \psi &= \zeta\end{aligned}\tag{4}$$

où b est la buoyancy, $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2$ est le Laplacien et ζ la vorticité, composante horizontale perpendiculaire au plan de l'écoulement. Le couplage entre la stratification b et la dynamique b se fait via i) l'advection de b et ii) le couple du poids, terme $\partial_x b$. Pour faire apparaître des ondes internes il faut que b soit dominé par une stratification de base $b_r(z)$ et donc du type $b = b_r + b'$, avec b' une perturbation. Notez que $(\zeta, b) = (0, b_r)$ correspond au repos. La stratification est caractérisée par sa fréquence de Brunt-Vaisala

$$N^2(z) = \partial_z b_r. \quad (5)$$

Cette stratification permet la propagation d'ondes internes dont on rappelle la relation de dispersion (cas d'une stratification uniforme)

$$\omega^2 = N^2 \cos^2 \theta = N^2 \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2}, \quad (6)$$

où θ est l'angle que fait \mathbf{k} avec l'horizontale. Ces ondes sont éminemment dispersives. La vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase. La pulsation maximale, imposant le critère CFL est N , correspond à des oscillations verticale pures. Pour mimer (3) on définit

$$c_{\max} = N \Delta x \quad (7)$$

qui est une vitesse maximale d'origine numérique (présence du Δx).

Implémentation numérique Présentées ainsi (1) et (4) sont formellement assez proches bien que leur physique soit radicalement différente. Les deux étapes clefs du modèles sont i) advection d'un traceur (comme le TP advection) et ii) inversion de la vorticité pour déterminer la fonction de courant. Ces deux éléments sont pris en charge respectivement par `rhs_adv.m` et `inversion_vorticity.m`. Vous n'avez pas besoin d'aller regarder ces routines pour faire le TP mais bien sûr vous avez le droit de regarder si vous êtes curieux.

Paramètre CFL Au niveau du numérique vous pourrez à nouveau jouer avec les schémas en temps et en espace. Cette fois le paramètre CFL λ est basé sur

$$\lambda = \frac{\Delta t \max(u_{\max}, c_{\max})}{\Delta x} \quad (8)$$

On voit deux régimes apparaître :

régime linéaire pour lequel $u_{\max} < c_{\max}$, le pas de temps est imposé par les ondes,

régime nonlinéaire pour lequel $u_{\max} > c_{\max}$, le pas de temps est imposé par l'advection.

Régime nonlinéaire En pratique on passe d'un régime à l'autre en jouant sur l'intensité des ondes. Soit ϵ un nombre sans dimension caractérisant l'amplitude des ondes. Typiquement $q = q_b + \epsilon q'$ pour les ondes de Rossby et $b = b_r + \epsilon b'$ pour les ondes internes. Lorsque $\epsilon \ll 1$ on peut linéariser chacun des modèles (1) et (4), introduire les ondes planes, et retrouver les relations de dispersion (2) et (6). Le code étant fondamentalement nonlinéaire en jouant sur ϵ on peut augmenter l'amplitude des ondes et voir les effets nonlinéaires apparaitre. A ce stade faisons une remarque très importante : les ondes sont souvent des phénomènes oscillants dans le temps et l'espace mais il n'y aucune raison qu'elles soient purement sinusoidales. La décomposition en sinus vient de l'analyse de Fourier. Les ondes peuvent aussi se propager en paquets. Si le milieu n'est pas dispersif (cas des Rossby longues, $|\mathbf{k}|R_d \ll 1$) alors n'importe quel paquet d'ondes se propage sans se déformer. Ainsi un tourbillon peut être considéré comme . . . un paquet d'ondes ! c'est un peu extrême mais cela permet de comprendre la dérive vers l'ouest des tourbillons.

Réflexion des ondes Lorsque les ondes rencontrent un bord (une côte pour les ondes de Rossby, le fond ou la surface pour les ondes internes) elles se réfléchissent, tout comme la lumière se réfléchit sur une surface métallique. Cependant du fait de leur côté dispersif, la réflexion des ondes de Rossby et des ondes internes conduit à des phénomènes surprenants et lourds de conséquences, tant pour la physique que pour le numérique.

Ondes de Rossby En arrivant sur les bords ouest, les ondes longues se réfléchissent en ondes courtes.

Ondes internes Elles maintiennent leur angle θ au cours de la réflexion. Si le fond fait un angle α avec l'horizontale alors l'onde peut se réfléchir vers le bas si $\alpha > \theta$, vers le haut si $\alpha < \theta$. La conservation du flux d'énergie se traduit par un changement d'amplitude. La longueur d'onde aussi change au cours de la réflexion.

2 Ondes de Rossby

C'est maintenant à vous de jouer. Dans cette partie vous utiliserez le script `Wave_rossby.m`. De nombreux paramètres sont configurables, à vous de les changer pour tester/découvrir/comprendre tel ou tel aspect. Liste des paramètres :

- `Rd` le rayon de déformation
- `geom` géométrie du domaine ('channel' ou 'square')
- `amplitude` ϵ controlant l'amplitude de la perturbation

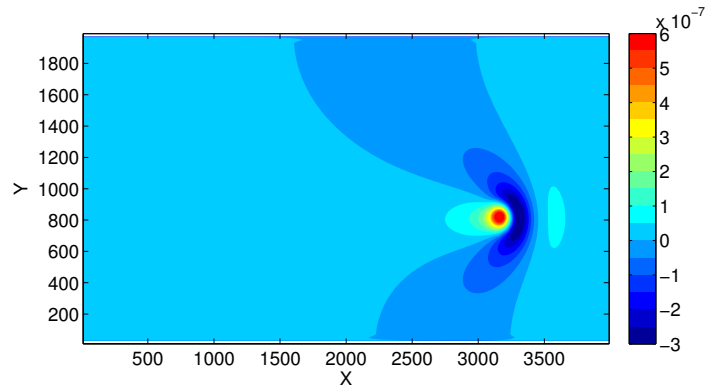


FIGURE 1 – Vorticité d’une onde de Rossby courte dans le régime linéaire ($\epsilon = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-1} R_d$). A l’instant initial le paquet était circulaire

— `sigma` la taille de la perturbation initiale

Pour la visualisation

- `plotanom` (0 ou 1) permet d’afficher la PV totale q ou l’anomalie q'
- `color` 0 = échelle de couleur fixée par `cax`, 2 = échelle de couleur s’ajustant automatiquement
- `varplot` variable à plotter
- `nplot` période d’affichage (en nombre de pas de temps)

Le modèle est initialisé avec une perturbation gaussienne de largeur σ . Points que vous pouvez observer :

Régime dispersif vs. non dispersif Prendre une petite amplitude `amplitude=0.01` ou plus petite. Jouez sur la taille relative de la perturbation initiale `sigma` vs. `Rd` le rayon de deformation.

Comment faire pour qu’une perturbation se déplace vers l’ouest sans se déformer (i.e. avoir un tourbillon) ?

Structure de l’onde Regarder la signature de l’onde en PV totale q , en vitesse. Le point à observer : si l’amplitude de l’onde est faible, la PV totale ne varie presque pas à l’oeil, car elle est dominée par $q_b(y)$.

Réflexion sur un bord ouest Mettez vous en configuration bassin et regardez comment l’onde se réfléchit. Constraster la réflexion d’une onde courte vs. une onde longue

Paramètre nonlinéaire En configuration canal, augmenter l’amplitude de la perturbation. Regarder comment Δt se met à ne plus être constant

[par défaut le code tourne en CFL imposé et donc Δt s'ajuste automatiquement]. Observer la dérive vers le pôle des cyclones ($q' > 0$), la dérive vers l'Equateur des anticyclones ($q' < 0$) et interpréter cela en terme d'effet induit par le tourbillon sur q_b . Pousser la nonlinéarité dans ses retranchements `amplitude=2` et observer ce qu'il se passe.

Eddy resolving vs. non eddy resolving Le nombre sans dimension $\gamma = \Delta x/R_d$ est un paramètre numérique clef déterminant si le modèle est eddy resolving ou pas. En effet les tourbillons ont des tailles en $\mathcal{O}(R_d)$. Si $\gamma \geq 1$ le pas de grille est trop grand pour résoudre les tourbillons, on est dans le régime grande échelle, typique des modèles climatiques couplés. Pour $\gamma \sim 1$ on est dans la gamme eddy-permitting et pour $\gamma \ll 1$ le modèle est eddy resolving. Examiner la propagation des ondes de Rossby dans le régime grande échelle.

3 Ondes internes

Dans cette partie vous utiliserez le script `Wave_internal.m`. Vous pouvez jouer sur

- `geom` pour changer la géométrie du domaine
- `amplitude` pour changer ϵ l'amplitude de la perturbation initiale ou de l'onde incidente selon le cas
- `sourceterm` (0 ou 1) pour activer ou non l'onde incidente
- `theta_wave` l'angle θ de l'onde incidente
- `plotanom` (0 ou 1) pour plotter la buoyancy totale ou l'anomalie

Le forçage de l'onde incidente est implémentée dans la routine `rhs_forcing_nh.m`.

Evolution d'une perturbation initiale Regarder comment évolue une perturbation initiale dans une stratification uniforme. Changer le rapport d'aspect de la perturbation et regarder l'influence sur les faisceaux d'énergie.

Régime nonlinéaire Regarder l'évolution sur la buoyancy totale b (`plot_anom=0`), constater qu'il ne se passe pas grand chose. Augmenter ϵ pour atteindre le régime non linéaire et regarder les conséquences. Constater que Δt n'est plus constant.

Réflexion d'une onde interne Faire réfléchir une onde interne de faible amplitude dans une boite carrée fermée. Observer les rayons. Activer un fond incliné. Regarder comment l'onde réfléchie conserve son angle θ . Augmenter la pente du fond afin que l'onde soit réfléchie vers le bas. Que se passe-t-il au voisinage de la pente critique ?

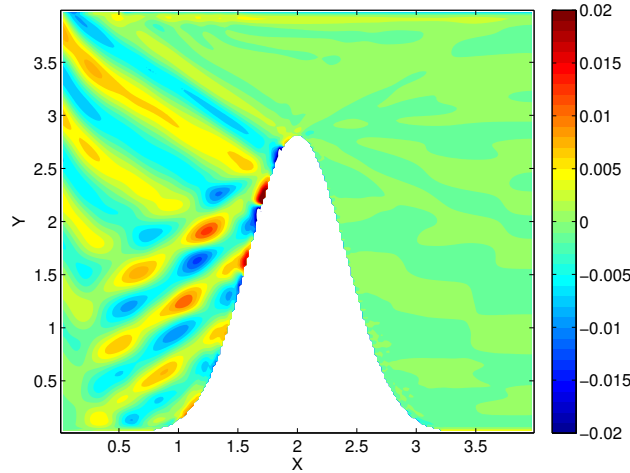


FIGURE 2 – Onde interne linéaire ($\theta = 60^\circ$, $\epsilon = 2.10^{-2}$) se réfléchissant sur un mont sous-marin.

Sensibilité du numérique La réflexion d’une onde interne pose de sérieux problèmes numériques. Il est difficile de maintenir la solution lisse partout, tout le temps. Quel combinaison de schémas semble être optimale ? Regarder si une montée en résolution améliore ou pas la chose ?

Conséquence sur le mixing Pour les pentes critiques, regarder sur la flottabilité totale b si cela se traduit par du mélange. Gonfler l’amplitude de l’onde incidente (en restant modérer) pour mieux apprécier l’effet.

Réflexion sur un mont sous-marin Regarder la réflexion sur un mont sous-marin. Vous pouvez changer la hauteur du mont et sa largeur. Y a-t-il des configurations pathologiques ?

Différence hydrostatique vs. non-hydrostatique Le code offre la possibilité de tourner en version hydrostatique. En manipulant les équations du modèle vous pouvez vous convaincre que cette hypothèse revient à changer la relation entre ζ et ψ

$$(1 - \epsilon_{NH})\partial_{xx}^2\psi + \partial_{zz}^2\psi = \zeta \quad (9)$$

et à prendre $\epsilon_{NH} = 1$ pour le régime hydrostatique, $\epsilon_{NH} = 0$ pour le régime non-hydrostatique. En pratique le paramètre ϵ_{NH} est réglé par `param.hydrostatic`. Le code ne fonctionne pas très bien avec `param.hydrostatic=1`, utilisez plutôt `param.hydrostatic=0.95`. Observez alors comment l’hypothèse hydrostatique modifie la dynamique des ondes internes.